

Ejercicios del capítulo 3 (módulos 6 al 8)

1. Factorice completamente en los enteros:

- a. $x^4 - 100$. RTA: $(x^2 - 10)(x^2 + 10)$.
- b. $x^2 + 3x - 10$. RTA: $(x + 5)(x - 2)$.
- c. $z^4 + 5z^2 + 6$. RTA: $(z^2 + 3)(z^2 + 2)$.
- d. $3x^2 + 19x - 14$. RTA: $(x + 7)(3x - 2)$.
- e. $a^5 + 1$. RTA: $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$.
- f. $18x^3 - 8x$. RTA: $2x(3x - 2)(3x + 2)$.
- g. $x^4 + x^2 + 25$. RTA: $(x^2 - 3x + 5)(x^2 + 3x + 5)$.
- h. $2t^4 - 16t$. RTA: $2t(t - 2)(t^2 + 2t + 4)$.

2. Factorice en R completamente las siguientes expresiones:

- a. $-x - y + a(x + y)$.
- b. $x^4 + x^3 - x - 1$.
- c. $(x + 1)^2 - 4$.
- d. $xy + yz - xz - x^2$.
- e. $3x^2 - x - 10$.
- f. $x^3 - 5x^2 - x + 5$.
- g. $\frac{x^2}{4} - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{4}$.
- h. $x^2y^2 - xy - 20$.
- i. $\frac{x^6}{64} - 1$.
- j. $x^5 + x + 1$.

3. Factorice completamente en los reales y en los complejos:

- a. $x^4 - 100$. RTA: En los reales $(x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})(x^2 + 10)$.
En los complejos $(x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})(x - i\sqrt{10})(x + i\sqrt{10})$.
- b. $3m^4 - 24mn^3$. RTA: En los reales $3m(m - 2n)(m^2 + 2mn + 4n^2)$.
En los complejos $3m(m - 2n)(m + (1 + i\sqrt{3})n)(m + (1 - i\sqrt{3})n)$.
- c. $z^4 + 5z^2 + 6$. RTA: En los reales $(z^2 + 3)(z^2 + 2)$.
En los complejos $(z + i\sqrt{3})(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2})$.

d. $x^5 + x^3 - x^2 - 1$. RTA: En los reales $(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)$.

En los complejos $(x-1)\left(x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(x+i)(x-i)$.

e. $x^4 + x^2 + 25$. RTA: En los reales $(x^2 - 3x + 5)(x^2 + 3x + 5)$.

En los complejos $\left(x - \frac{3+i\sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \frac{3-i\sqrt{11}}{2}\right)\left(x + \frac{3+i\sqrt{11}}{2}\right)\left(x + \frac{3-i\sqrt{11}}{2}\right)$.

f. $2t^4 + 16t$. RTA: En los reales $2t(t-2)(t^2+2t+4)$.

En los complejos $2t(t-2)(t+1-i\sqrt{3})(t+1+i\sqrt{3})$.

4. Factorice completamente sobre C los siguientes polinomios:

a. $x^2 - 6x - 7 - y^2 - 8y$.

b. $4x^2 - y^2 + 4y - 4$.

c. $x^7 + x^4 - 16x^3 - 16$.

d. $3x^2 - (9a+15b)x + 45ab$.

e. $y^6 - 7y^3 + 3xy(x+y)$.

f. $x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$.

g. $x^2 - 6x + y^2 - 6y + 2xy + 9$.

h. $4 - 2x + x^2 - 8 - x^3$.

i. $x^3 - 7x + 6$.

j. $x^2 + 7x + y^2 - 7y - 2xy - 8$.

k. $x^4 - 5x^2 + 6$.

l. $x^4 - 5x^2 + 6$.

5. Encuentre el rango de las siguientes funciones cuadráticas y el punto de máximo o de mínimo según corresponda:

a. $f(x) = 3x^2 - 6x$. RTA: $y \geq 3$, $x = 1$.

b. $f(x) = -5x^2 - 20x + 60$. RTA: $y \leq 80$, $x = -2$.

c. $f(x) = -7x^2 - 42x - 65$. RTA: $y \leq -2$, $x = -3$.

d. $f(x) = 2x^2 - 16x + 37$. RTA: $y \geq 5$, $x = 4$.

e. $f(x) = 4x^2 - 28x + 49$. RTA: $y \geq 0$, $x = \frac{7}{2}$.

f. $f(x) = x^2 - 4x - 32$. RTA: $y \geq -36$, $x = 2$.

6. Encuentre el rango de las siguientes funciones cuadráticas:

a. $P(x) = x^2 - 2x - 1$.

b. $P(x) = -3 - 4x^2$.

c. $P(x) = 4x - x^2$.

d. $P(x) = x^2 - 2x + 17$.

e. $P(x) = 3x^2 - 17x + 7$.

f. $P(x) = x^2 - 1$.

7. Encuentre las raíces de las siguientes ecuaciones:

a. $4x^2 + 4x - 15 = 0$. RTA: $3/2, -5/2$.

b. $10x^2 + 21x + 9 = 0$. RTA: $-3/2, -3/5$.

c. $36x^2 + 35 = 72x$. RTA: $7/6, 5/6$.

d. $x^3(19 + x^3) = 216$. RTA: $2, -3$.

e. $x^2 - 2x - 15 = 0$. RTA: $5, -3$.

f. $(a - b)x^2 = 2bx + 4a$. RTA: $2a/(a + b), -2$.

8. Encuentre las raíces de las siguientes ecuaciones:

a. $18x^2 - 9x + 4 = 0$.

b. $x^2 - 4x + 4 = 0$.

c. $x^6 - 4x^3 + 4 = 0$.

d. $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$.

e. $x^2 - 17x + 1 = 0$.

f. $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

9. Escriba una ecuación cuadrática cuyas raíces sean 4 y 3. RTA: $x^2 - 7x + 12 = 0$.

10. Encuentre una ecuación cuadrática tal que la suma de sus raíces sea 2 y el producto sea -3 .

11. Escriba una ecuación cuadrática cuyas raíces sean $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. RTA: $x^2 - x + 1 = 0$.

12. Si $x^2 - x - k = 0$, encuentre los valores de k para que la ecuación tenga dos soluciones distintas.

13. Halle el valor de k de modo tal que la suma de las raíces de las siguientes ecuaciones sea igual al producto de las mismas.
- $x^2 + (3k - 2)x - k = 0$. RTA: $k = 1$.
 - $(k - 5)x^2 + 2(k - 1)x - 2 = 0$. RTA: $k = 2$.
14. Escriba una ecuación cuyas raíces sean el doble de las raíces de la ecuación $x^2 - 5x + 4 = 0$.
15. Encuentre dos números cuya suma sea 23 y su producto 132. RTA: 11 y 12.
16. La suma de dos números es 25 y su producto es 136. Encuentre los números.
17. La suma de un número y su recíproco es $\frac{26}{5}$. Halle el número. RTA: 5 y $\frac{1}{5}$.
18. Encuentre los valores de k para que la ecuación $x^2 - x + k$ no tenga raíces reales.
19. Un tren recorre 300 km a velocidad uniforme. Si la velocidad hubiese sido 5 km más por hora, hubiera tardado en el recorrido 2 horas menos. Halle la velocidad del tren. RTA: 25.
20. Un piloto realiza un vuelo de 600 km. Si aumenta su velocidad en 40 km por hora puede recorrer esa distancia en media hora menos. ¿Cuál es su velocidad?
21. Un obrero y su hijo pueden realizar un trabajo en 15 días. Después de trabajar juntos 6 días, el hijo trabajando solo termina el trabajo en 30 días. ¿En cuánto tiempo podría terminar cada uno de ellos trabajando sin ayuda? RTA: el padre, $21\frac{1}{2}$ días; el hijo, 50 días.
22. Dos obreros A y B , trabajando juntos, pueden hacer una tarea en $7\frac{1}{2}$ horas. Trabajando solo, A tardaría 8 horas más que B para hacer dicha tarea. ¿Cuánto tardaría cada uno trabajando solo?
23. El producto de un número de dos dígitos y el número obtenido al intercambiar sus dígitos es 252. Si la diferencia de los números es 9, encuentre dichos números. RTA: 12 y 21.
24. El producto de un número de dos dígitos y el número obtenido al intercambiar sus dígitos es 736. Si la diferencia de los números es 9, encuentre los números.
25. Dada la ecuación $x^2 + (k - 1)x + 4 - k = 0$, halle los valores de k tales que la ecuación tenga:
- Dos raíces reales iguales. RTA: $k = -3$ y $k = -5$.
 - Una de ellas igual a cero. RTA: $k = 4$.
26. Dada la ecuación $8x^2 - (k - 1)x + k - 7 = 0$, qué valores debe tomar k para que las raíces sean:
- Reales e iguales.
 - Recíprocas.
 - Una de ellas 0.

27. Un corredor recorre una carretera con velocidad de 80 km/h a partir de un punto A de la misma. Media hora más tarde parte de ese punto A otro corredor a 90 km/h. ¿Al cabo de cuánto tiempo y a qué distancia de A se encuentran?
RTA: 4h; 360 km.
28. A y B son dos ciudades que están 300 km una de la otra. Si dos trenes parten simultáneamente de A y de B , cada uno hacia la otra estación, y después de que se encuentran, el tren que salió de A llegó a B en 9 horas, en tanto que el que salió de B llegó a A en 4 horas, encuentre la velocidad de cada tren.
29. Se construye una caja sin tapa cortando de las esquinas de una hoja de aluminio cuadrados de 3 dm de lado. Si la longitud de la hoja de aluminio es el doble de su ancho, halle las dimensiones de la hoja que producirá una caja de 60 decímetros cúbicos. RTA: ancho, 8 dm; largo, 16 dm.
30. ¿En cuánto tiempo pueden tres obreros A , B , C realizar una tarea trabajando juntos, si A solo puede hacerlo en 6 horas, B solo en una hora más y C solo en el doble del tiempo de A ?
31. Un bote en un río demora 1.6 horas más para recorrer 36 km cuando va en contra de la corriente que de regreso cuando recorre los mismos 36 km a favor de la corriente. Si la velocidad de la corriente es de 4 km por hora, ¿cuál es la velocidad del bote en aguas tranquilas? RTA: a favor de la corriente, 2 horas; en contra de la corriente, 3.6 horas.
32. Dos grifos llenan un tanque en 6 horas. ¿Cuánto tiempo necesitará cada grifo para llenarlo solo, sabiendo que uno de ellos tarda 5 horas más que el otro?
33. Un depósito de gasolina se puede llenar en 4 horas cuando se utilizan dos llaves. ¿Cuántas horas se necesitarán para que cada llave por sí sola llene el depósito, si la llave de menor diámetro requiere 3 horas más que la de mayor diámetro? RTA: la de mayor diámetro, 6.77 horas, y la de menor diámetro, 9.77 horas.
34. Un avión despegue de un portaviones y vuela hacia el occidente durante 2 horas a razón de 600 kilómetros por hora. Después regresa a 500 km por hora. Mientras tanto, el barco ha viajado hacia el occidente a 30 km por hora. ¿A las cuántas horas se encontrarán?
35. Un automóvil está viajando a una velocidad desconocida. Si viajara 15 km por hora más rápido se tardaría 90 minutos menos en recorrer 450 km. ¿A qué velocidad va el automóvil? RTA: 60 km/h.
36. Un avión vuela de Bogotá a Buenos Aires una distancia de 4.200 km. La velocidad del viaje de regreso fue de 100 km por hora mayor que el de ida. Si el total del viaje tomó 13 horas, ¿cuál fue la velocidad de Bogotá a Buenos Aires?
37. Encuentre dos enteros pares consecutivos cuyo producto sea 168. RTA: -14 , -12 y 12 , 14 .
38. Una lancha tarda 1 hora más en viajar 24 km contra la corriente de un río que en el viaje de regreso. Si la lancha tiene una velocidad de 10 km por hora en aguas tranquilas, ¿cuál es la velocidad de la corriente?